

Samuel Nicolay

# Analyse mathématique

Fonctions définies sur une partie  
de la droite réelle

Cours avec exercices corrigés  
et exercices d'approfondissement



2<sup>e</sup> édition

ellipses

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Logique et théorie des ensembles</b>	<b>1</b>
I.1	Logique . . . . .	1
I.1.1	Quelques locutions et symboles . . . . .	2
I.1.2	Tables de vérité . . . . .	3
I.1.3	Types de démonstration . . . . .	4
I.1.4	Une application : le binôme de Newton . . . . .	9
I.2	Ensembles . . . . .	13
I.2.1	Définition . . . . .	13
I.2.2	Relations entre éléments et parties d'un ensemble . . . . .	14
I.2.3	Ensembles associés à des ensembles . . . . .	15
I.2.4	Relations remarquables . . . . .	17
I.2.5	Union et intersection de plusieurs ensembles . . . . .	18
I.2.6	Produit fini d'ensembles . . . . .	19
I.2.7	Deux quantificateurs de première importance . . . . .	20
I.2.8	Le paradoxe de Russell $\wp$ . . . . .	20
I.3	Applications . . . . .	21
I.3.1	Définition d'une application . . . . .	21
I.3.2	Image directe, image inverse . . . . .	23
I.3.3	Composition d'applications . . . . .	24
I.3.4	Injections, surjections et bijections . . . . .	25
I.3.5	L'axiome du choix $\wp$ . . . . .	28
I.4	Ensembles équipotents, dénombrables . . . . .	29
I.4.1	Ensembles en bijection . . . . .	29
I.4.2	Ensembles dénombrables . . . . .	30
I.4.3	Ensembles infinis $\wp$ . . . . .	32
I.4.4	Exemples d'ensembles dénombrables $\wp$ . . . . .	33
<b>II</b>	<b>Les nombres</b>	<b>35</b>
II.1	Définition . . . . .	35
II.1.1	Les nombres naturels, entiers et rationnels . . . . .	35
II.1.2	Les nombres réels . . . . .	37
II.1.3	Les nombres complexes . . . . .	41
II.2	Compléments concernant les nombres . . . . .	44
II.2.1	Valeur absolue d'un nombre réel . . . . .	44
II.2.2	Module d'un nombre complexe . . . . .	45

II.2.3	Signature, parties positive et négative . . . . .	46
II.2.4	Parties majorées et minorées de $\mathbb{R}$ . . . . .	49
II.2.5	Intervalles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ . . . . .	51
II.2.6	Ensembles bornés . . . . .	54
<b>III</b>	<b>Suites complexes</b>	<b>57</b>
III.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	57
III.1.1	Définitions . . . . .	58
III.1.2	Suites convergentes de $\mathbb{C}$ . . . . .	59
III.1.3	Résultats fondamentaux . . . . .	62
III.1.4	Suites divergentes . . . . .	64
III.1.5	Suites réelles . . . . .	66
III.2	Propriétés supplémentaires . . . . .	69
III.2.1	Combinaison linéaire de suites convergentes . . . . .	69
III.2.2	Produit et inverse de suites convergentes . . . . .	70
III.2.3	Parties réelle et imaginaire d'une suite convergente . . . . .	72
III.2.4	Module d'une suite convergente . . . . .	73
III.2.5	Sur les suites réelles . . . . .	73
III.2.6	Théorème de Cesàro . . . . .	76
III.2.7	Exemples fondamentaux . . . . .	77
III.3	Rudiments de topologie dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ . . . . .	83
III.3.1	Adhérence d'un ensemble . . . . .	83
III.3.2	Ensembles ouverts et fermés . . . . .	84
III.3.3	Ensembles compacts . . . . .	88
III.3.4	Propriété de Borel-Lebesgue $\mathfrak{M}$ . . . . .	90
III.4	Suites de Cauchy . . . . .	96
III.4.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	97
III.4.2	Complétude . . . . .	98
III.4.3	Théorème de Bolzano-Weierstraß . . . . .	100
<b>IV</b>	<b>Séries complexes</b>	<b>107</b>
IV.1	Définition et premières propriétés . . . . .	107
IV.1.1	Définition . . . . .	107
IV.1.2	Suite associée et restes d'une série . . . . .	109
IV.1.3	Séries réelles . . . . .	110
IV.1.4	Critère de Cauchy . . . . .	111
IV.1.5	Convergence absolue et semi-convergence . . . . .	112
IV.1.6	Convergence et permutations . . . . .	114
IV.2	Séries fondamentales . . . . .	117
IV.2.1	Séries géométriques dans $\mathbb{C}$ . . . . .	117
IV.2.2	Séries de Riemann . . . . .	120
IV.3	Théorèmes d'Abel et de Mertens . . . . .	121
IV.3.1	Critères d'Abel . . . . .	122
IV.3.2	Théorème de Mertens . . . . .	124
IV.4	Étude de la convergence de séries . . . . .	125
IV.4.1	Séries alternées . . . . .	126
IV.4.2	Critères théoriques de convergence . . . . .	127

IV.4.3	Critères pratiques de convergence . . . . .	128
IV.4.4	Exemples d'étude de série . . . . .	130
<b>V</b>	<b>Fonctions</b> . . . . .	<b>133</b>
V.1	Généralités . . . . .	133
V.1.1	Définitions . . . . .	133
V.1.2	Opérations entre fonctions . . . . .	135
V.1.3	Fonctions associées . . . . .	136
V.1.4	Fonctions bornées . . . . .	139
V.1.5	Zéros d'une fonction . . . . .	141
V.1.6	Fonctions caractéristiques . . . . .	142
V.2	Limite des valeurs d'une fonction . . . . .	143
V.2.1	Définitions . . . . .	143
V.2.2	Critère par les suites . . . . .	147
V.2.3	Critère par les limites restreintes . . . . .	148
V.2.4	Critère de Cauchy . . . . .	149
V.2.5	Propriétés de la limite . . . . .	150
V.2.6	Limite épointée . . . . .	152
V.3	Fonctions continues . . . . .	153
V.3.1	Définitions . . . . .	153
V.3.2	Exemples fondamentaux . . . . .	155
V.3.3	Propriétés des fonctions continues . . . . .	159
V.3.4	Fonctions continues sur un compact . . . . .	160
V.4	Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ . . . . .	165
V.4.1	Continuité à gauche et à droite . . . . .	165
V.4.2	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	167
V.4.3	Théorème de la limite monotone . . . . .	172
V.4.4	Convexité . . . . .	176
<b>VI</b>	<b>Fonctions dérivables</b> . . . . .	<b>183</b>
VI.1	Dérivabilité . . . . .	183
VI.1.1	Définitions . . . . .	183
VI.1.2	Dérivée d'une fonction définie sur une partie réelle . . . . .	185
VI.1.3	Dérivée complexe . . . . .	192
VI.1.4	Théorèmes de génération . . . . .	193
VI.2	Théorème des accroissements finis . . . . .	197
VI.2.1	Théorème des accroissements finis . . . . .	197
VI.2.2	Théorème de l'ouvert connexe . . . . .	202
VI.3	Espaces $C^p$ . . . . .	204
VI.3.1	Définitions . . . . .	204
VI.3.2	Théorème de structure $\mathfrak{U}$ . . . . .	206
VI.3.3	Génération d'éléments de $C^p$ . . . . .	208
VI.3.4	Formule de Taylor-Lagrange . . . . .	211
VI.4	Application à l'étude des fonctions réelles . . . . .	214
VI.4.1	Variation . . . . .	214
VI.4.2	Fonction inverse . . . . .	215
VI.4.3	Fonctions convexes et fonctions concaves . . . . .	220

VI.4.4	Recherche d'extrema . . . . .	222
VI.4.5	Asymptotes et points particuliers . . . . .	226
VI.4.6	Calcul de limites . . . . .	231
<b>VII</b>	<b>L'intégrale de Darboux</b>	<b>243</b>
VII.1	Définition et premières propriétés . . . . .	243
VII.1.1	Intégrales de fonctions étagées . . . . .	243
VII.1.2	Intégrales supérieure et inférieure . . . . .	249
VII.1.3	Intégration sur un intervalle compact . . . . .	252
VII.1.4	Deux critères d'intégrabilité . . . . .	257
VII.2	Interprétation de l'intégrale d'une fonction . . . . .	258
VII.2.1	Notations . . . . .	258
VII.2.2	Sommes de Riemann . . . . .	261
VII.3	Calcul d'intégrales . . . . .	269
VII.3.1	Théorème fondamental du calcul intégral . . . . .	269
VII.3.2	Intégration par parties . . . . .	272
VII.3.3	Formule du changement de variable . . . . .	275
<b>VIII</b>	<b>Fonctions élémentaires</b>	<b>281</b>
VIII.1	Puissances entières . . . . .	281
VIII.1.1	Définition . . . . .	281
VIII.1.2	Formule de Newton . . . . .	282
VIII.2	Polynômes . . . . .	283
VIII.2.1	Définition . . . . .	283
VIII.2.2	Identité de Taylor . . . . .	285
VIII.2.3	Étude des zéros . . . . .	285
VIII.2.4	Division de polynômes . . . . .	289
VIII.2.5	Plus grand commun diviseur . . . . .	290
VIII.3	Fractions rationnelles . . . . .	291
VIII.3.1	Définitions . . . . .	291
VIII.3.2	Décomposition d'une fraction rationnelle propre . . . . .	293
VIII.3.3	Cas pratiques de décomposition . . . . .	296
VIII.3.4	Calcul effectif d'une décomposition . . . . .	297
VIII.4	Les fonctions exp et ln . . . . .	300
VIII.4.1	La fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}$ . . . . .	300
VIII.4.2	L'équation fonctionnelle du logarithme $\mathbb{Q}$ . . . . .	303
VIII.4.3	La constante d'Euler-Mascheroni $\mathbb{Q}$ . . . . .	304
VIII.4.4	La fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ . . . . .	306
VIII.4.5	Unicité de la fonction exponentielle $\mathbb{Q}$ . . . . .	311
VIII.4.6	Une définition alternative de l'exponentielle $\mathbb{Q}$ . . . . .	313
VIII.4.7	La fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ . . . . .	316
VIII.4.8	Fonctions puissance et exponentielle . . . . .	319
VIII.4.9	Logarithme de base $b$ . . . . .	325
VIII.5	Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses . . . . .	326
VIII.5.1	Cosinus et sinus hyperboliques . . . . .	327
VIII.5.2	Fonctions tangente et cotangente hyperboliques . . . . .	331
VIII.5.3	Calcul hyperbolique . . . . .	332

VIII.5.4	Fonctions hyperboliques inverses . . . . .	335
VIII.6	Fonctions circulaires . . . . .	340
VIII.6.1	Fonctions cosinus et sinus . . . . .	340
VIII.6.2	Le nombre $\pi$ . . . . .	343
VIII.6.3	Fonctions tangente et cotangente . . . . .	345
VIII.6.4	Calcul trigonométrique . . . . .	345
VIII.6.5	Formules du calcul trigonométrique . . . . .	348
VIII.6.6	Retour aux fonctions tangente et cotangente . . . . .	350
VIII.6.7	Valeurs remarquables . . . . .	352
VIII.6.8	Sur l'irrationalité de $\pi$ $\mathbb{Q}$ . . . . .	354
VIII.6.9	Fonctions trigonométriques inverses . . . . .	357
VIII.7	Applications . . . . .	361
VIII.7.1	Retour à l'exponentielle . . . . .	361
VIII.7.2	Retour aux séries . . . . .	363
VIII.7.3	Égalité de fonctions . . . . .	365
VIII.7.4	Étude de la fonction $\arg$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . . . . .	366
VIII.7.5	Dérivée logarithmique . . . . .	367
VIII.7.6	Calcul de dérivées d'ordre supérieur . . . . .	368
<b>IX</b>	<b>Primitivation dans <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>371</b>
IX.1	Généralités . . . . .	371
IX.1.1	Notation $f \simeq g$ . . . . .	371
IX.1.2	Primitive d'une fonction . . . . .	372
IX.2	Théorie du calcul des primitives . . . . .	374
IX.2.1	Résultats fondamentaux . . . . .	374
IX.2.2	Généralités sur le calcul des primitives . . . . .	376
IX.2.3	Primitivation d'un polynôme . . . . .	377
IX.2.4	Primitivation d'une exponentielle-polynôme . . . . .	377
IX.2.5	Calcul de $\int P(x, \cos(ax), \sin(ax), \dots, \cos(bx), \sin(bx)) dx$ . . . . .	378
IX.2.6	Primitivation d'une fraction rationnelle . . . . .	379
IX.2.7	Fonctions dont le calcul d'une primitive peut se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle . . . . .	382
IX.2.8	Calcul de $\int R(\cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots) dx$ . . . . .	387
IX.2.9	Calcul de $\int R(\cosh(x), \sinh(x), \cosh(2x), \sinh(2x), \dots) dx$ . . . . .	390
IX.2.10	Passage de $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ à l'une des primitives $\int R'(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) d\varphi$ ou $\int R'(\cosh(\varphi), \sinh(\varphi)) d\varphi$ . . . . .	391
IX.2.11	Primitivation des fonctions inverses . . . . .	393
<b>X</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>395</b>
X.1	Opérateurs de dérivation . . . . .	395
X.1.1	Définitions générales . . . . .	395
X.1.2	Opérateurs de dérivation linéaires à coefficients constants . . . . .	398
X.2	EDLCC . . . . .	400
X.2.1	Définitions . . . . .	401
X.2.2	Résolution des équations homogènes . . . . .	401
X.2.3	Généralités sur les équations non-homogènes . . . . .	408
X.2.4	Méthode de la variation des constantes . . . . .	409

X.2.5	Méthode des exponentielles-polynômes . . . . .	412
X.2.6	Équation d'Euler . . . . .	415
X.3	Équations différentielles ordinaires . . . . .	418
X.3.1	Équations à second membre séparé . . . . .	419
X.3.2	Équations à second membre homogène par rapport à $x$ et $u$ .	421
X.3.3	Équations à second membre linéaire en $u$ . . . . .	422
X.3.4	Équations exactes $\square$ . . . . .	425
X.3.5	Équation différentielles d'ordre deux . . . . .	426
<b>XI</b>	<b>Compléments sur l'intégrale</b>	<b>431</b>
XI.1	Intégrales de Darboux généralisées . . . . .	431
XI.1.1	Intégrales convergentes . . . . .	431
XI.1.2	Critères pour l'existence d'une intégrale . . . . .	434
XI.1.3	Changement de variable et intégration par parties . . . . .	436
XI.1.4	Fonctions absolument intégrables . . . . .	437
XI.1.5	Critères d'intégrabilité . . . . .	440
XI.1.6	Calcul pratique d'intégrales . . . . .	444
XI.1.7	Séries numériques absolument convergentes . . . . .	447
XI.2	Intégrales et limites . . . . .	448
XI.2.1	Passage de la limite sous le signe d'intégration . . . . .	448
XI.2.2	Interprétation de Cauchy-Riemann de l'intégrale . . . . .	451
XI.2.3	Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	452
XI.2.4	L'intégrale de Dirichlet . . . . .	459
	<b>Bibliographie</b>	<b>463</b>
	<b>Index</b>	<b>465</b>